4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}=\left(\frac{1}{4}\right)^x.\left[1-\frac{1}{4}\right]=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^x$

$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^x\right)=+\infty$ car $0<\frac{1}{4}<1$

5) $f(x)=\frac{3^x+3^{x+1}}{2^x+2^{x-1}}=\frac{4.3^x}{\frac{3}{2}.2^x}=\frac{8}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^x$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ car $\frac{3}{2}>1$

6) $\lim_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}})=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}.\left[1-x^{\frac{1}{3}}\right]=-\infty$

7) $g(x)=\frac{\ln x}{2^x}=\frac{\ln x}{e^{x\ln 2}}=(\ln x).e^{-x\ln 2}=\left(\frac{\ln x}{x}\right)(xe^{-x\ln 2})$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$X=-x\ln 2$, $\lim_{x\to+\infty}xe^{-x\ln 2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-Xe^X}{\ln 2}=0$

d'où $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0\times 0=0$

8) $\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\left[x.e^{-3x}\right]^{\frac{1}{3}}=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-1}{3}Xe^X\right]^{\frac{1}{3}}=0$

(X=-3x)

9) $\lim_{x\to+\infty}(x^{\frac{2}{3}}\ln x-x^{\frac{4}{3}}\ln x)=0-0=0$

10) $\lim_{x\to+\infty}2^x-e^x=\lim_{x\to+\infty}2^x.\left[1-\left(\frac{e}{2}\right)^x\right]=-\infty$

EX 26 :

$x\in]0,+\infty[$

$f(x)=\ln(2^x)-\ln(x^2)$

1) $f(2)=\ln 4-\ln 4=0$

$f(4)=\ln 16-\ln 16=0$

2) $f(x)=x\ln 2-2\ln x$

$f'(x)=\ln 2-\frac{2}{x}=\frac{x.\ln 2-2}{x}$

x	0		2/ln2		+∞
f '(x)	||	-	0	+	
f(x)	|| +∞	↘	f(2/ln2)	↗	+∞

* $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x\ln 2-2\ln x=+\infty$

* $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left[\ln 2-2\frac{\ln x}{x}\right]=+\infty$

* $f(\frac{2}{\ln 2})=2-2\ln(\frac{2}{\ln 2})<0$

x	0		2		4		+∞
f(x)	||	+	0	-	0	+	

3) $x\in[2,4]\to f(x)\le 0\Rightarrow 2^x\le x^2$

$x\in]0,2]\cup[4,+\infty[\to x^2\le 2^x$

EX 27 :

$f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^x=0$

d'où $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-1$

* $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^x=+\infty$

d'où $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

2) f est dérivable sur IR et

$f'(x)=\ln\left(\frac{3}{5}\right).\left(\frac{3}{5}\right)^x+\ln\left(\frac{4}{5}\right).\left(\frac{4}{5}\right)^x<0$

car $\ln\left(\frac{4}{5}\right)<0$ et $\ln\left(\frac{3}{5}\right)<0$

f est strictement décroissante sur IR

* $3^x+4^x=5^x\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1=0\Leftrightarrow f(x)=0$

• f est continue et strictement décroissante sur IR .elle réalise donc une bijection de IR sur f(IR)=]-1,+∞[

$0\in]-1,+\infty[$ d'où l'équation f(x)=0 admet une unique solution dans IR

(Rq: 2 est la seule solution de l'équation :$3^x+4^x=5^x$)

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn